1. *Солоха А.А.* Уточненная математическая модель шагового двигателя. // Математические методы в технике и технологиях: материалы XVII междунар. научн. конф. – Казань. – 2005. – Т.5.
2. *Нейдорф Р.А., Солоха А.А.* Задача квазиоптимального быстродействия управления шаговым двигателем. // Математические методы в технике и технологиях: материалы XVII междунар. научн. конф. – Казань. – 2005. – Т.2.
3. *Нейман Л.Р,. Демирчан К.С.* Теоретические основы электротехники. – Л.: Энергия, 1967.
4. *Пей Ан.* Сопряжение ПК с внешними устройствами. – М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2004.
5. *Солоха А.А.* Аппроксимация динамических свойств шагового двигателя линейной математической моделью.// Сб. науч. тр. КГТИ. – Кисловодск. 2005.
6. *Растригин Л.А.* Системы экстремального управления. – М.: Наука, 1974.

УДК 681.513.5

© 2006 г. **Р.А. Нейдорф,** д-р техн. наук,
Н.Н. Чан
(Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону)

РЕКУРРЕНТНО-ДИФФЕОМОРФНЫЙ СИНТЕЗ КВАЗИОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ОГРАНИЧЕННЫХ ЗАКОНОВ УПРАВЛЕНИЯ

Рассматривается новый подход к синтезу законов управления с обратной связью для нелинейных систем автоматического управления, в том числе, квазиоптимальных по быстродействию. Доказана их асимптотическая устойчивость, а также возможность ограничения получаемых при синтезе законов управления. Предположены алгоритмы реализации квазиоптимальных управлений с использованием ЭВМ.

Введение

Организация оптимального по быстродействию управления с учетом ограничений на управляющие воздействия и фазовые координаты представляет собой весьма сложную и далеко не решенную в ТАУ проблему. Известно, что принцип максимума сводит задачу оптимального управления к решению двухточечной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений (ДУ). Для задач оптимального управления характерно, что их аналитическое решение удается получить лишь в редких случаях. В связи с этим в современной ТАУ разработаны различные способы нахождения аппроксимационного решения задачи оптимального управления. Результат такого решения называют *квазиоптимальным управлением*. Большинство этих методов направлено на аппроксимацию поверхности переключения или численные методы нахождения моментов переключения, что резко снижает общность и диапазон применения их результатов. Ввиду актуальности проблемы оптимизации быстродействия в технологических и технических, особенно, в электромеханических системах, работы по совершенствованию методов синтеза квазиоптимальных законов управления востребованы сегодня и перспективны в будущем.

В работах [1, 2] предложен новый подход к построению аналитической модели квазиоптимального по быстродействию (КОБ) управления. Его сущность состоит в статической аппроксимации правой части математической модели (ММ) оптимальной системы, а преимущество заключается в том, что качество управления, оцениваемое временем регулирования, задается в модели параметрически. Варьирование искусственно введенными параметрами позволяет изменять степень квазиоптимальности решения.

Серьезные трудности в реализации математических моделей такого рода возникают с повышением их порядка, т.к. получить аналитически модель оптимального по быстродействию управления, к которой можно было бы применить аппроксимационный подход, весьма затруднительно, начиная уже с третьего порядка. Эта задача еще более усложняется при построении квазиоптимальных управлений нелинейными объектами. Однако, опираясь на введенное в [1] понятие *квазиоптимальности по выбранному критерию* и полностью обоснованный там же результат первого порядка, можно построить эффективные рекуррентные подходы как к аналитическому, так и к численному нахождению квазиоптимальных по быстродействию управлений. Один из таких подходов иллюстрирует метод, построенный на основе теоретических положений дифференциальной геометрии, который предлагается в данной работе.

Постановка задачи

Пусть управляемая система (n – 1)-го ($n \geq 3$) порядка описывается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_i = a_i(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}),\ i = \overline{1, n-2};\ \dot{x}_{n-1} = a_{n-1}(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}) + v, \qquad (1)$$

где функции a_i дифференцируемы по всем переменным $x_1, x_2, \ldots x_{n-1}$ и $a_i(0,0,\ldots 0) = 0$. Требуется найти управление v, переводящее объект управления из начального состояния $\left(x_1^0, x_2^0, \ldots x_{n-1}^0\right)$ в начало координат за близкое к минимальному времени t_{kvopt}, при ограничениях на производную первой переменной состояния и на управление $|\dot{x}_1| \leq x_m$; $|v| \leq v_m$.

Заметим, что условие ограничения $|v| \leq v_m$ может быть выражено различными нелинейными функциями с насыщением, – например,

$v = v_m \, arctan(x_n) \cdot 2/\pi$, $\dot{x}_n = u, x_n^0 = 0$. Тогда эквивалентную задачу можно записать в форме

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \ldots x_n), i = \overline{1, n-1}; \; \dot{x}_n = u, \tag{2}$$

где $f_i := a_i, \forall i = 1, n-2$; $f_{n-1} := n_m \arctan(x_n) \cdot 2/p + a_{n-1}$, при условии ограничения $|\dot{x}_1| \le x_m$. Требуется найти управление u, переводящее объект управления из начального состояния $(x_1^0, x_2^0, \ldots x_{n-1}^0)$ в начало координат за близкое к минимальному времени t_{kvopt}, при ограничениях только на производную первой переменной состояния $|\dot{x}_1| \le x_m$.

Исходные посылки для решения

В работе [1] показано, что для динамической системы первого порядка можно построить модель квазиоптимального по быстродействию движения при ограничении на скорость изменения выходной координаты. Эта модель имеет структуру нелинейного дифференциального уравнения

$$\dot{x}_1 = S_{КОБ}(x_1, e_1), \quad S_{КОБ}(x, e) = \frac{-v_m \cdot x}{\sqrt{x^2 + e^2}}, \quad e > 0, v_m > 0. \tag{3}$$

При этом правая его часть аппроксимирует сигнатуру, а точность аппроксимации задается параметром e, при устремлении которого к нулю можно с любой точностью приближаться к сигнатуре. Одновременно свойства модели (3) приближаются к оптимальным по быстродействию при ограничении на производную переменной x, задаваемую вторым настроечным параметром – v_m.

Рекуррентный подход к оптимизации свойств управляемой системы с использованием методов дифференциальной геометрии

Главной идей применения теории дифференциальной геометрии [3, 4] является нахождение диффеоморфизма (гладкого изоморфизма) между исходной и некоторой виртуальной системой (математическая модель синтезируемой системы управления). При этом исходная система задана и служит как бы динамическим базисом для проектируемой виртуальной системы, качество динамики которой приближается к исходной, но приобретает дополнительные, хорошие с точки зрения критериальной стратегии синтеза качества.

Предположим, что виртуальная система имеет вид

$$\dot{y}_i = g_i(y_1, y_2, \ldots y_n), \; i = \overline{1, n}, \tag{4}$$

где функции y_i можно представить в виде

$$y_i = y_i\left(x, u, \dot{u} \ldots u^{(l)}\right), \; i = \overline{1, n}; \tag{5}$$

x, u – переменные состояния и управления системы (2).

Диффеоморфизм определяется между исходной и виртуальной системами тогда и только тогда, когда якобиан $[\partial y/\partial x]$ не вырожден, т.е.

$$rank\begin{bmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = n. \quad (6)$$

Утверждение 1. При выполнении условий (5) и (6), а также $l = n - 4$ возможен диффеоморфизм систем (2) и (4) и при условии

$$u\left(\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\right) + \sum_{k=0}^{n-4}\frac{\partial y_n}{\partial u^{(k)}}u^{(k+1)} = h_n(y_n) - \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial y_n}{\partial x_j} f_j(.). \quad (7)$$

Доказательство. Пусть h – некоторая необходимое число раз дифференцируемая вектор-функция $h = \{h_1(m), h_2(m), \ldots h_n(m)\}$. Тогда справедливо следующая последовательность преобразования:

$$y_1 = x_1;$$

$$y_2 = f_1(.) - h_1(y_1) = \dot{x}_1 - h_1(y_1) \Leftrightarrow \dot{y}_1 = h_1(y_1) + y_2;$$

$$\ldots$$

$$y_i = \sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_j} f_j(.) + \frac{\partial y_{i-1}}{\partial x_n}u + \sum_{k=0}^{i-5}\frac{\partial y_{i-1}}{\partial u^{(k)}}u^{(k+1)} - h_{i-1}(y_{i-1}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \dot{y}_{i-1} = h_{i-1}(y_{i-1}) + y_i, \forall i = \overline{3,n}. \quad (8)$$

Таким образом, закон (7) однозначно определяет виртуальную систему

$$\dot{y}_i = h_i(y_i) + y_{i+1}, i = \overline{1,n-1},\ y_n = h_n(y_n), \quad (9)$$

которая может быть сформирована на основе предъявленных проектировщиком критериальных требований в силу выбранной для нее диагонально сопровождающей структуры*. Легко получить выражение (7) из сопоставления y_n из (8) и $\dot{y}_n$ из (9).

Утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. Пусть h – некоторая необходимое число раз дифференцируемая вектор-функция $h = \{h_1(m), h_2(m), \ldots h_n(m)\}$, обладающая свойствами

$$h_i(0) = 0,\ \text{и}\ {dh_i}/{dm} < 0, \forall m \in R, i = \overline{1,n}. \quad (10)$$

Тогда системы (2), (8) асимптотически устойчивы.

* Термин образован из понятий диагональной (функции $h_i(y_i)$) и сопровождающей (члены y_{i+1}, матриц) системных матриц.

Доказательство. Поскольку якобиан правой части (8) имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial y_1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \frac{\partial h_{n-1}}{\partial y_{n-1}} & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \frac{\partial h_n}{\partial y_n} \end{bmatrix}, \qquad (11)$$

то в соответствии с условием (10) все собственные числа линеаризованной системы (8) будут отрицательными в любой области пространства состояний. Таким образом, согласно первой теореме Ляпунова система (8) асимптотически устойчива. В силу закона (7), определяющего и замыкающего диффеоморфизм, система (2) также является асимптотически устойчивой.

Утверждение 2 доказано.

Следствие утверждения 1. Если система (2) имеет треугольный сопровождающий вид[**]

$$\dot{x}_i = f_i\left(x_1, x_2, \ldots x_{i+1}\right), i = \overline{1, n-1}; \ \dot{x}_n = u, \qquad (12)$$

то закон управления (7) принимает вид

$$u = \left(h_n(f_n) - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} f_j(.)\right)\left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)^{-1} \qquad (13)$$

Таким образом, построена общая методика реализации виртуальной системы (9) на основе реально существующей динамической системы (2) – объекта управления. Достоинствами методики является то, что возможно формирование ограничения на управления (вариант неограничения является естественным частным случаем), а также возможность в довольно широких пределах варьировать структуру параметров функции h_i, определяемых условиями (10).

Недостатком общего выражения (7) для закона управления является наличие дифференциального оператора (в общем случае нелинейный) в левой части выражения. Такая структура ограничивает возможность использования закона (7), так как для реализации u требует наличия обратного оператора, связанного с исходным свойством взаимнооднозначно. Если структура функции h_i такое свойство обеспечивает, то управление легко реализуется схемой на рис. 1, где блок $f(u)$ реализует векторную функцию, определяемую левой частью уравнения (7).

[**] Имеется в виду сочетание формы нижней треугольной и сопровождающей матриц.

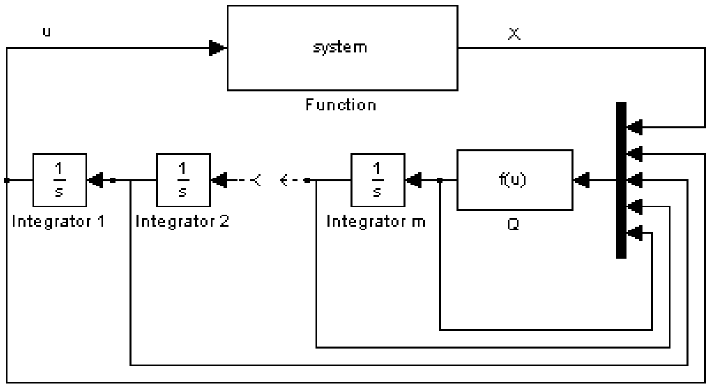

Рис.1. Общая структура реализации управления квазиоптимального по быстродействию.

Таким образом, возникает вопрос о выборе функции h_i, во-первых, эффективно реализующей критериальную стратегию синтеза, а во-вторых, упрощающей процесс нахождения управления.

В подобных методах виртуальная (эталонная) система часто строится на основе линейных дифференциальных операторов (например, каноническая форма Бруновского [4]). Однако нелинейные динамические системы, как хорошо известно из теории дифференциальных уравнений и ТАУ, может иметь некоторые дополнительные положительные свойства (органичность движения, трансформация свойств в различных областях пространства состояний, повышенное быстродействие и т.п.). Эти свойства либо не присущи, либо слабо выражены и не варьируемы (не настраиваемы) в линейных системах.

В связи с этим в данной работе предлагается метод повышения быстродействия систем управления, ориентированный на квазиоптимизацию интенсивности изменения наиболее инерционных переменных состояния системы. Наиболее подходят для этой постановки объекты управления, заданные системой дифференциальных уравнений сопровождающей формы. В этом случае предыдущая переменная обладает существенно большей инерционностью, чем следующая, что позволяет в виртуальной системе (9) применить нелинейные КОБ-модели (3) лишь для начальных уравнений. При этом остальные переменные могут подчиняться простым законам, заданным некоторыми линейными многообразиями.

Определение: Моделью квазиоптимального по быстродействию управления k-го уровня объектом n-го порядка ($n \geq k$) называется система следующего вида

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = S_{КОБ}(y_1, e_1) + y_2; \ldots; \dot{y}_k = S_{КОБ}(y_k, e_k) + y_{k+1}, \\ \dot{y}_{k+1} = -\dfrac{y_{k+1}}{e_{k+1}} + y_{k+2}, \ldots, \dot{y}_{n-1} = -\dfrac{y_{n-1}}{e_{n-1}} + y_n, \\ \dot{y}_n = -\dfrac{y_n}{e_n}. \end{cases} \qquad (14)$$

В модели (14) определены условия обеспечения асимптотической устойчивости, т.к.

$$\frac{dS_{КОБ}(y,e)}{dy} = \frac{-n_m e^2}{\left(y^2+e^2\right)^{1.5}} < 0,\; \frac{d\left(-y/e\right)}{dy} = \frac{-1}{e} < 0,\; \forall y. \qquad (15)$$

Если принять допущение, что якобианы $\left[\partial y / \partial x\right]$ не вырождены, то модель (14) может быть использована для синтеза как виртуальная система, и соответствующий закон управления определяется по (7) или (13). Тогда, в рассматриваемом случае можно определить приближенную оценку времени согласования $n-k$ последних переменных с k первыми переменными системы (14):

$$t_{СОГ} \le (3 \div 5) \cdot \max_{j\in[k+1,n]} \{e_j\}. \qquad (16)$$

Проблема реализации алгоритма управления на ЭВМ

Для реализации закона (13) с использованием в качестве виртуальной системы модели КОБ первого порядка был создан ППП Qcontrol (рис. 2), который работает в среде MatLab. Пакет использует возможность решения символьных уравнений компонента Symbolic Math Toolbox для автоматизированной вариации параметров при аппроксимации. Он позволяет найти в символьном виде аналитическое решение и моделировать системы управления теоретически любого порядка. Однако для систем порядка выше семи аналитическое решение на ПЭВМ оказывается слишком громоздким.

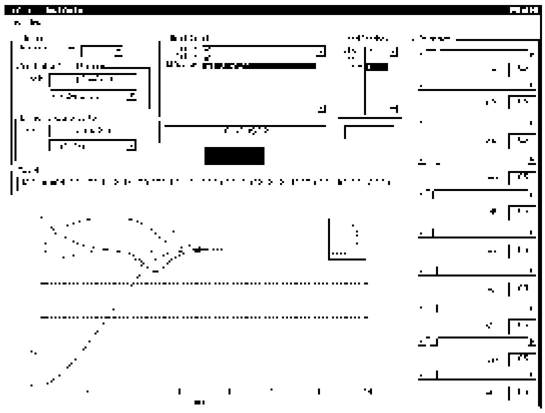

Рис. 2. Общий вид рабочего окна Qcontrol.

Аналитическое решение позволяет определить вектор параметров настройки квазиоптимальности. При этом можно использовать интеллектуальные подходы – такие как нейронные сети, нечеткая логика и пр.

Иллюстративный пример

Рассматривается нелинейная система третьего порядка [4]

$$\dot{x}_1 = x_2;\; \dot{x}_2 = \sin x_1 + x_3;\; \dot{x}_3 = n\,. \qquad (17)$$

Математическая модель (17) описывает движение математического маятника в верхнем неустойчивом положении, при этом x_1 – угол отклонения маятника от вертикали, x_2 – скорость отклонения, x_3 – момент, приложенный к маятнику. Ею описываются многие электромеханические объекты: синхронные генераторы, двигатели с асинхронным пуском и др.

Поставим задачу синтеза КОБ-управления 1-го уровня для объекта (17) при ограничении на скорость отклонения и само управление.

Тогда виртуальная система (14) примет вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \dfrac{-v_m \cdot y_1}{\sqrt{y_1^2 + e_1^2}} + y_2, \\ \dot{y}_2 = -\dfrac{y_2}{e_2} + y_3, \\ \dot{y}_3 = -\dfrac{y_3}{e_3} + y_4, \\ \dot{y}_4 = -\dfrac{y_4}{e_4}. \end{cases} \tag{18}$$

Результатом обоснованной выше процедуры синтеза является закон управления, обеспечивающий асимптотическое по быстродействию управление выбранным объектом с оговоренным выше ограничением управления и скорости движения.

Рис. 3, 4 иллюстрируют результат синтеза САУ в среде Qcontrol: движение маятника из состояния $(x_1, x_2, x_3) = (1{,}0{,}0)$ в начало координат $(x_1, x_2, x_3) = (0{,}0{,}0)$, при условии ограничения на скорость и управление $|x_2| \le 0.8,\ |v| \le 1$.

Пакет Qcontrol дает закон управления

$$n = \arctan(x_4) \cdot 2 / pi, \ ,$$

$$\dot{x}_4 = u,$$

где u определяется выражением, представленным на рис. 5.

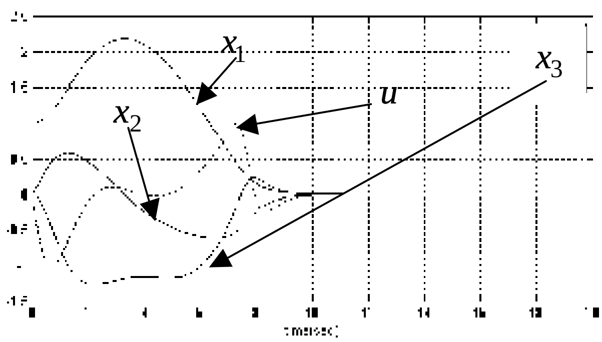

Рис.3. Управление и собственные движения маятника.

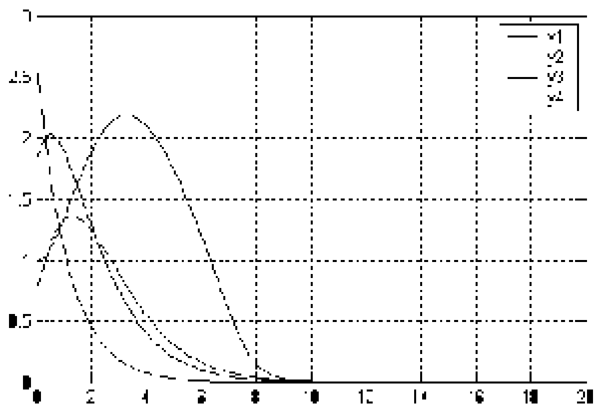

Рис. 4. Собственные движения виртуальной системы.

$$
-\frac{1}{2}\Bigg(\Bigg(\frac{\dfrac{x_2+\dfrac{x_1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{.5}}}{\varepsilon_2}+\dfrac{\varepsilon_1^2 x_2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(3/2)}}+x_3+\sin(x_1)}{\varepsilon_3}+\Bigg(\frac{\dfrac{1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{.5}}-\dfrac{1.0\,x_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{1.5}}}{\varepsilon_2}-\frac{3\,\varepsilon_1^2 x_2 x_1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(5/2)}}+\cos(x_1)\Bigg)x_2
$$

$$
+\Bigg(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{\varepsilon_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(3/2)}}\Bigg)(x_3+\sin(x_1))+\frac{2\,\mathrm{atan}(x4)}{\pi}\Bigg)\Big/\varepsilon_4+\Bigg(\frac{\dfrac{\dfrac{1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{.5}}-\dfrac{1.0\,x_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{1.5}}}{\varepsilon_2}-\dfrac{3\,\varepsilon_1^2 x_2 x_1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(5/2)}}+\cos(x_1)}{\varepsilon_3}+
$$

$$
\Bigg(\frac{-3.0\dfrac{x_1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{1.5}}+\dfrac{3.00\,x_1^3}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{2.5}}}{\varepsilon_2}+\frac{15\,\varepsilon_1^2 x_2 x_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(7/2)}}-\frac{3\,\varepsilon_1^2 x_2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(5/2)}}-\sin(x_1)\Bigg)
$$

$$
x_2-\frac{3\,\varepsilon_1^2 x_1\,(x_3+\sin(x_1))}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(5/2)}}+\Bigg(\frac{1}{\varepsilon_2}+\frac{\varepsilon_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(3/2)}}\Bigg)\cos(x_1)\Bigg)x_2+
$$

$$
\Bigg(\frac{\dfrac{1}{\varepsilon_2}+\dfrac{\varepsilon_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(3/2)}}}{\varepsilon_3}-\frac{6\,\varepsilon_1^2 x_2 x_1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(5/2)}}+\frac{\dfrac{1}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{.5}}-\dfrac{1.0\,x_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{1.5}}}{\varepsilon_2}+\cos(x_1)\Bigg)
$$

$$
(x_3+\sin(x_1))+\frac{2\Bigg(\dfrac{1}{\varepsilon_3}+\dfrac{1}{\varepsilon_2}+\dfrac{\varepsilon_1^2}{(x_1^2+\varepsilon_1^2)^{(3/2)}}\Bigg)\mathrm{atan}(x_4)}{\pi}\Bigg)(1+x_4^2)\,\pi
$$

Рис. 5. Закон КОБ-управления перевернутым маятником.

Кроме того, пакетом Qcontrol определены значения вектора параметров настройки степени квазиоптимизации, при которых реализуется квазиоптимальность ее быстродействия $(e_1, e_2, e_3, e_4) = (0.39, 0.79, 1.19, 1.14)$

Факт эффективной настройки степени квазиоптимальности быстродействия параметрами e иллюстрируется на рис. 6, где видно, как сокращается в системе время затухания переходных процессов с уменьшением e_1.

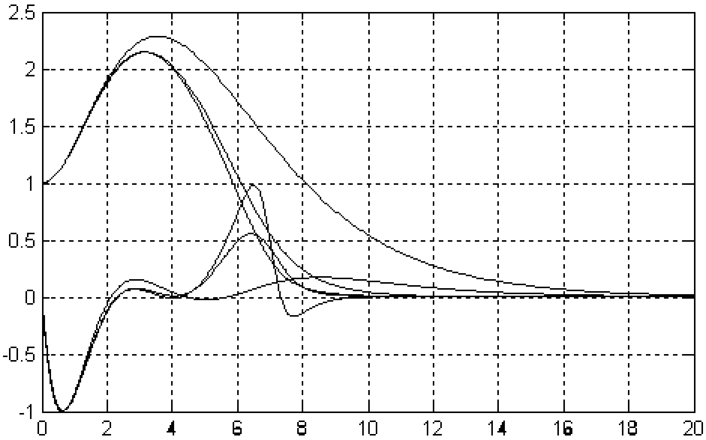

Рис. 6. Изменения закона управления и первой переменной при вариации параметра.

Заключение

На основе предложенного в статье метода можно аналитически синтезировать и эффективно настраивать квазиоптимальные по быстродействию системы управления нелинейными объектами при ограничении на фазовые координаты и на само управление.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нейдорф Р.А.* Нелинейное ускорение динамических процессов управления объектами первого порядка с учетом ограниченности воздействий. // Вестник ДГТУ. Управление и диагностика в динамических системах. – Ростов н/Д: Изд-во ДГТУ. – 1999. – С. 13-21.
2. *Нейдорф Р.А.* Эффективная аппроксимация кусочных функций в задачах квазиоптимального по быстродействию управления. Математические методы в технике и технологиях: материалы XVII междунар. научн. конф. ММТТ-2000. – СПб.: Изд-во СПбГТУ. – 2000. – Т. 2. – С.18-22.
3. ***Hangos K.M., Bokor J., Szederkényi G.*** Analysis and Control of Nonlinear Process Systems. – London, 2004.
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: учебник в 3-х т. Т.3. Методы современной теории автоматического управления. / под ред. *Н.Д. Егупова*. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967.